

# Cardinal du cône nilpotent

CARRIER Nicolas

Soit  $\mathbb{K}$  un corps et  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $d$ . On notera  $\mathcal{N}(E)$  l'ensemble des endomorphismes de  $E$  nilpotents.

**Théorème : (Cardinal du cône nilpotent)** Soit  $q > 2$ . Si  $\mathbb{K} = \mathbb{F}_q$  alors :

$$n_d := \#\mathcal{N}(E) = q^{d(d-1)}$$

On démontrera d'abord le lemme suivant :

**Lemme de Fitting :** Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ , il existe un entier  $p$  tel que :

$$E = \text{Ker } u^p \oplus \text{Im } u^p$$

*Démonstration.* Lemme de Fitting :

On rappelle que les suites  $(\text{Ker } u^n)_n$  et  $(\text{Im } u^n)_n$  sont respectivement croissantes et décroissantes au sens de l'inclusion<sup>(1)</sup>. De plus,  $E$  étant de dimension finie, les suites sont stationnaires à partir d'un certain rang<sup>(2)</sup>

Soit  $p$  le plus petit entier tel que  $(\text{Ker } u^n)_{n \geq p}$  et  $(\text{Im } u^n)_{n \geq p}$  sont stationnaires. Montrons que  $\text{Ker } u^p \cap \text{Im } u^p \subseteq \{0_E\}$

Soit  $x \in \text{Ker } u^p \cap \text{Im } u^p$ , alors  $u^p(x) = 0$  et  $\exists y \in E$  tel que  $u^p(y) = x$ .

Donc  $u^{2p}(y) = 0$ , et alors  $y \in \text{Ker } u^{2p}$ . Par monotonie,  $y \in \text{Ker } u^p$  et donc  $x = 0$

Ainsi,  $\text{Ker } u^p \cap \text{Im } u^p = \{0_E\}$ . De plus, par théorème du rang et Grassmann, on a que  $\dim E = \dim(\text{Ker } u^p + \text{Im } u^p)$  et donc que  $E = \text{Ker } u^p + \text{Im } u^p$ . D'où  $E = \text{Ker } u^p \oplus \text{Im } u^p$

□

---

(1). Se montre très facilement

(2). Par théorème du rang, les deux suites seront stationnaires à partir d'un même rang

*Démonstration.* Cardinal du cône nilpotent :

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ . On note  $F = \text{Ker } u^p$  et  $G = \text{Im } u^p$  où  $p$  est un entier tel que  $E = F \oplus G$ , on le suppose minimal. Un tel entier existe via le lemme de Fitting.

Soit  $u_F$  et  $u_G$  les restriction de  $u$  à  $F$  et  $G$ .  $F$  est stable par  $u_F$  car  $\forall x \in F$ ,  $u^p(u_F(x)) = u(u^p(x)) = u(0_E) = 0_E$  et  $G$  est stable par  $u_G$  car  $\forall x \in G$ ,  $\exists y \in E$  tel que  $u^p(y) = x$ , donc  $u^p(z) := u^p(u_G(y_G)) = u_G(x)$  où  $y = y_G + y_F$

Il est clair que  $u_F$  est nilpotent, d'indice de nilpotence  $p$ .

Montrons que  $u_G$  est inversible. Pour cela, on va montrer qu'il est injectif. Soit  $x \in \text{Ker } u_G$ , alors  $x \in \text{Ker } u$  et donc  $x \in F$  par croissance de  $(\text{Ker } u^n)_n$ . Mais aussi  $x \in G$  car  $\text{Ker } u_G \subseteq G$ . Donc par le lemme,  $x = 0_E$ . D'où  $u_G$  est injectif et donc est bijectif car  $E$  est de dimension finie.

Cessons de fixer  $u$ .

Notons  $\mathcal{E} = \{(F, G, u, v) : F \oplus G = E, u \in \mathcal{N}(F) \text{ et } v \in \text{GL}(G)\}$  et posons :

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E) & \longrightarrow & \mathcal{E} \\ u & \longmapsto & (F, G, u_F, u_G) \end{array} \quad \text{où } F = \text{Ker } u^p \text{ et } G = \text{Im } u^p$$

L'application est bien définie par ce qui a été fait avant. Montrons qu'elle est bijective. Commençons par montrer qu'elle est injective :

Soit  $u, v \in \mathcal{L}(E)$  tels que  $\varphi(u) = \varphi(v)$ . On note  $F = \text{Ker } u^p$ ,  $G = \text{Im } u^p$ ,  $F' = \text{Ker } v^p$  et  $G' = \text{Im } v^p$

Soit  $x \in E$ ,  $\exists!(y, z) \in F \times G$  tel que  $x = y + z$ . Donc

$$u(x) = u(y) + u(z) = u_F(y) + u_G(z) = v_{F'}(y) + v_{G'}(z) = v(x)$$

D'où  $u = v$  et ainsi  $\varphi$  est injective.

Montrons que  $\varphi$  est surjective. Soit  $(F, G, u, v) \in \mathcal{E}$ . Soit  $\mathcal{B}_F$  une base de  $F$ ,  $\mathcal{B}_G$  une base de  $G$  et  $\mathcal{B}$  une base de  $E$  formée des vecteurs de  $\mathcal{B}_F$  et  $\mathcal{B}_G$ . On définit  $f \in \mathcal{L}(E)$  tel que :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \text{Mat}_{\mathcal{B}_F}(u) & 0 \\ 0 & \text{Mat}_{\mathcal{B}_G}(v) \end{pmatrix}$$

On a par construction que  $u = f_F$  et  $v = f_G$ . De plus,

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f^p) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \text{Mat}_{\mathcal{B}_G}(v^p) \end{pmatrix}$$

D'où  $\text{Ker } f^p = F$  et  $\text{Im } f^p = \text{Im } v^p = G$  <sup>(3)</sup>.

Ainsi,  $\varphi$  est une bijection de  $\mathcal{L}(E)$  dans  $\mathcal{E}$ . D'où

$$\#\mathcal{E} = \#\mathcal{L}(E) = q^{d^2}. \quad (1)$$

Soit  $m_{k,d} = \#X_k := \#\{(F, G) : \dim F = k, F \oplus G = E\} \forall k \in \mathbb{N}$ ,  $n_d = \#\mathcal{N}(E)$  et  $g_d = \#\text{GL}(E)$ .

D'une part, on admet que : <sup>(4)</sup>

$$g_d = (q^d - 1)(q^d - q) \dots (q^d - q^{d-1}) \quad (2)$$

D'autre part, considérons l'action de  $\text{GL}(E)$  sur  $X_k$  définie par  $g \cdot (F, G) = (g(F), g(G))$ . Montrons que l'action est transitive <sup>(5)</sup>. Soit  $(F, G), (F', G') \in X_k$ . Considérons ces bases respectives de  $F, G, F', G'$  :  $\mathcal{B}_F = (x_1, \dots, x_k)$ ,  $\mathcal{B}_G = (x_{k+1}, \dots, x_d)$ ,  $\mathcal{B}_{F'} = (y_1, \dots, y_k)$  et  $\mathcal{B}_{G'} = (y_{k+1}, \dots, y_d)$ . On note  $\mathcal{B} = \mathcal{B}_F \oplus \mathcal{B}_G$  et  $\mathcal{B}' = \mathcal{B}_{F'} \oplus \mathcal{B}_{G'}$ . On considère l'application  $g$  telle que :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(g) = \text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(\text{Id}_E)$$

Ainsi,  $\forall i \in \llbracket 0; k \rrbracket$ ,  $g(x_i) = x'_i$ . D'où  $g(F, G) = (F', G')$ . L'action admet ainsi une unique orbite.

Par équation aux classes,  $m_{k,d} = \sum_{x_i \in \mathcal{O}_i} \frac{\#\text{GL}(E)}{\#\text{Stab}_{x_i}(\text{GL}(E))}$

Par unicité de l'orbite, il suffit de déterminer le cardinal du stabilisateur d'un seul élément de  $E$ . Soit  $(F, G) \in X_k$ . On pose  $\mathcal{B} = (x_1, \dots, x_d)$  une base de  $E$ , on note  $F = \text{Vect}(x_1, \dots, x_k)$  et  $G = \text{Vect}(x_{k+1}, \dots, x_d)$ .

Soit  $g \in \text{Stab}_{(F,G)}(\text{GL}(E))$ , on souhaite que  $F$  et  $G$  soient stable par  $g$ . Autrement dit,

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \text{ où } A \in \text{GL}_k(\mathbb{F}_q), B \in \text{GL}_{d-k}(\mathbb{F}_q)$$

D'où :

$$\#\text{Stab}_{(F,G)}(\text{GL}(E)) = \#\text{GL}_k(\mathbb{F}_q) \cdot \#\text{GL}_{d-k}(\mathbb{F}_q) = g_k \cdot g_{d-k} \forall k \in \mathbb{N}$$

Et donc :

$$m_{k,d} = \frac{g_d}{g_k \cdot g_{d-k}} \forall k \in \mathbb{N} \quad (3)$$

---

(3). car  $v$  inversible donc  $v^p$  aussi

(4). à savoir démontrer!! Pour voir la démonstration, cliquer ici (8)

(5). à sauter si manque de temps

Considérons  $\mathcal{E}_k$  le sous espace de  $\mathcal{E}$  tel que  $\dim F = k$ . On a :

$$\#\mathcal{E}_k = m_{k,d} \cdot n_k \cdot g_{n-k} \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad (4)$$

Or  $\#\mathcal{E} = \sum_{k=0}^d \#\mathcal{E}_k$ . D'où par (1), (3) et (4) :

$$\frac{q^{d^2}}{g_d} = \sum_{k=0}^d \frac{n_k}{g_k} \quad (5)$$

Si on remplace  $d$  par  $d-1$ , on a que :

$$\frac{q^{(d-1)^2}}{g_{d-1}} = \sum_{k=0}^{d-1} \frac{n_k}{g_k} \quad (6)$$

En soustrayant (5) par (6), on obtient :

$$\frac{q^{d^2}}{g_d} - \frac{q^{(d-1)^2}}{g_{d-1}} = \frac{n_d}{g_d}$$

ie,

$$n_d = q^{d^2} - \frac{q^{(d-1)^2} g_d}{g_{d-1}} \quad (7)$$

Or par (2),  $g_d = (q^d - 1)(q^d - q) \dots (q^d - q^{d-1})$

D'où  $\frac{g_d}{g_{d-1}} = \frac{(q^d - 1) \dots (q^d - q^{d-1})}{(q^{d-1} - 1) \dots (q^{d-1} - q^{d-2})} = q^{d-1}(q^d - 1)$  (6)

Ainsi, par (7) :

$$\begin{aligned} n_d &= q^{d^2} - q^{(d-1)^2} q^{(d-1)} (q^d - 1) \\ &= q^{d^2} - q^{d^2 - 2d + 1 + d - 1} (q^d - 1) \\ &= q^{d^2} - q^{d^2 - d + d} + q^{d^2 - d} \\ &= q^{d(d-1)} \end{aligned}$$

□

---

(6). On factorise tous les termes du numérateur par  $q$  sauf le premier

## Recasages

- Leçon 123 : Corps finis. Applications.
- Leçon 150 : Polynômes d'endomorphisme en dimension finie. Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications.
- Leçon 151 : Sous-espaces stables par un endomorphisme ou une famille d'endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications.
- Leçon 156 : Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents.
- Leçon 190 : Méthodes combinatoires, problèmes de dénombrement.

## Bonus : Calcul du cardinal de $\mathrm{GL}_d(\mathbb{F}_q)$

Il peut être intéressant de mettre cette démo pour les leçons 123 et 190, plutôt que celle du lemme de Fitting qu'on admettrait. La beauté de ce lemme ne se fait pas tant apprécier par ces leçons...

Soit  $M \in \mathrm{GL}_d(\mathbb{F}_q)$ . On note  $M = (C_1 \dots C_d)$  où  $C_i$  est la  $i$ -ème colonne de  $M$

Pour que  $M$  soit inversible, une condition nécessaire et suffisantes sur ses colonnes est qu'elles ne soient pas combinaisons linéaires l'une de l'autre. Entre autre, une condition nécessaire et suffisante sur la première colonne à fixer est qu'elle ne soit pas nulle. On commence par fixer  $C_1$ . Alors  $C_1 \in \mathbb{F}_q^d \setminus \{0_{\mathbb{F}_q^d}\}$ . Ce qui fait qu'on a  $q^d - 1$  combinaisons de choix pour  $C_1$ .

Fixons maintenant  $C_2$ . Alors  $C_2 \in \mathbb{F}_q^d \setminus \mathrm{Vect}(C_1)$ . D'où on a  $q^d - q$  combinaisons de choix pour  $C_2$

Plus généralement, si on fixe  $C_i$  en supposant avoir fixé les colonnes d'avant, il vient que  $C_i \in \mathbb{F}_q^d \setminus \mathrm{Vect}(C_1, \dots, C_{i-1})$ . Soit  $q^d - q^{i-1}$  combinaisons.

Ainsi, il vient qu'on a  $(q^d - 1) \dots (q^d - q^{d-1})$  combinaisons de choix pour  $M = (C_1 \dots C_d)$ . D'où

$$\# \mathrm{GL}_d(\mathbb{F}_q) = \prod_{k=0}^{d-1} (q^d - q^k) \tag{8}$$

□